

$$W_k := \{ (x, y) \mid x^2 + kxy + y^2 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2 ?$$

$$|k| = 1$$

$$k = +1 \quad W_k = \{ (x, y) \mid (x+y)^2 = 0 \} = \{ (x, y) \mid x+y=0 \}$$

$$k = -1 \quad W_k = \{ (x, y) \mid (x-y)^2 = 0 \} = \{ (x, y) \mid x-y=0 \}$$

$$(*) \quad x^2 + kxy + y^2 = 0 \quad \leftarrow \quad (0,0) \text{ è sempre soluzione.}$$

$$\Delta = k^2 y^2 - 4y^2 = y^2 (k^2 - 4)$$

Se $|k| < 2 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (*)$ non ha sol. non banali.

$$W_k = \{ (0,0) \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Se $|k| > 2 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow (*)$ per ogni valore finito

di y ha 2 soluzioni

$$x_1 = \frac{-ky + \sqrt{\Delta}}{2} \quad x_2 = \frac{-ky - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$P_1 = (x_1, y) \quad P_2 = (x_2, y) \in W_k$$

se W_k fosse sottospazio $\Rightarrow P_1 - P_2 \in W_k$

$$P_1 - P_2 = (x_1 - x_2, y - y) = (\sqrt{\Delta}, 0)$$

$$\text{d'altronde se } y = 0 \Rightarrow x^2 + kxy + y^2 = 0$$

$$\text{implica } x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} \neq 0 \text{ (perché } |k| > 2) \Rightarrow$$

$$(\sqrt{\Delta}, 0) \notin W_k.$$

Se $|k| = 2 \Rightarrow W_k$ sottospazio

$|k| < 2 \Rightarrow W_k = \{0\}$ sottospazio

$|k| > 2 \Rightarrow W_k$ non è sottospazio.

N.B. Se sono es. in $\mathcal{C} \Rightarrow W_k$ sottospazio $\Leftrightarrow k=t_2$.

□

Come costruire uno sp. vettoriale.

Sia $V(k)$ uno sp. vettoriale ed $X \subseteq V(k)$.
 X sottinsieme.

1) esiste un sottospazio di $V(k)$ che è il "più piccolo" rispetto l'inclusione che contiene X ?

2) se sì, come è fatto?

Risposta 1) Innanzi tutto almeno un sottospazio di $V(k)$ che contiene X esiste: $V(k)$.

oss: Siano $u, w \leq V(k)$ sottospazi.

Allora $u \cap w \leq V(k)$.

Dm: Siano $\forall \alpha, \beta \in k \ \forall \bar{u}, \bar{w} \in u \cap w$ abbiamo

$$\begin{aligned}\bar{u}, \bar{w} \in u &\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in u \Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in u \cap w \\ \bar{u}, \bar{w} \in w &\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in w\end{aligned}$$

□

Se $x \subseteq u$ e $u \leq V$ e $x \subseteq w$ e $w \leq V \Rightarrow$

$$x \subseteq u \cap w \leq V(k).$$

$\Rightarrow$ Esiste un sottospazio $L(x)$ che contiene x
ed è minimale rispetto $\subseteq$.

Definiamo

$$L(x) := \bigcap_{\substack{w \leq V \\ x \subseteq w}} w$$

oss: $0 \in \mathcal{L}(X)$ e quindi $\mathcal{L}(X) \neq \emptyset$.

In particolare $\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$.

$\emptyset \subseteq \{0\}$

N.B.: In teoria $\mathcal{L}(X)$ non dipende solo da X
ma anche da $V(k)$.

$$X = \{(1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}(X) = \{\alpha(1, 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$X \subseteq \{(1, 2)\} \subseteq \mathbb{C}^2 \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}^2}(X) = \{\alpha(1, 2) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

$$(i, 2i) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^2}(X) \setminus \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}(X).$$

oss: $X \subseteq V(K) \wedge \bar{X} \subseteq X \wedge A$

$\bullet L(X) \wedge \bar{L}(X) \subseteq V(K)$

$\bullet L(X) \cap L(\bar{X}) = \emptyset$

$\bullet \text{Se } Y \subseteq X \Rightarrow L(Y) \subseteq L(X)$

proprietà di chiusura.

Def: $X \subseteq V(K)$ è detto insieme di generatore

per $V(K)$ se $L(X) = V(K)$.

Se $\exists X \subseteq V(K)$ tale che $|X| < \infty$ e $L(X) = V(K)$ allora $V(K)$ è detto finitamente generato.

Teorema: Sia $X \subseteq V(K)$ ed $X \neq \emptyset$.

Chiamo $B(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i \mid \alpha_i \in K, \bar{x}_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}$ insieme di tutte le possibili combinazioni

Lineari

(cioè somme del tipo

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_r \bar{x}_r \text{ con } \alpha_i \in K, \bar{x}_i \in X)$$

~~esatto~~ di un numero finito di vettori di X .

Allora:

$$L(X) = L(X).$$

DIM: Supponiamo $X \neq \emptyset \Rightarrow L(X)$ contiene tutte le possibili c. lineari di un numero finito di elementi di X in quanto un sottospazio è chiuso rispetto le operazioni di v. vettoriale $\Rightarrow L(X) \subseteq L(X)$.
DOBBIAMO FAR VEDERE CHE $L(X) \subseteq L(X)$ cioè che $L(X)$ è sottospazio vettoriale.

$$X = \{(123), (100)\} \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(X) = \{ \alpha(123) + \beta(100) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}.$$

$$X = \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}(\emptyset) = \{(000)\}.$$

ESEMPI DI INSIEMI DI GENERATORI.

$$|K[x]| = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in K, n \in \mathbb{N}_0 \}.$$

$$\mathcal{G} = \{ 1, x, x^2, \dots, x_n x^n, \dots \} \quad |G| = \infty$$

$$|K[x]| \leq 3$$

$$\Rightarrow \mathcal{G} = \{ 1, x, x^2, x^3 \}.$$

$$\mathcal{G}' = \{ 2, x+7, x^2-2x, x^3+x^2+1 \}.$$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \{(2000), (02100), (00100), (00010), (00001)\}$$

$$\{a_0 \mathbf{1} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in K\} = \|K[x]\|_{\leq 3}$$

$$\mathcal{L}(1, x, x^2, x^3) = \|K[x]\|_{\leq 3}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & x & x^2 & x^3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\mathcal{L}(2, x+x^2, x^2-x^3, x^3+x^2+1) = \|K[x]\|_{\leq 3}$$

$$1 \in W : x+x^2 \in W \Leftrightarrow x+x^2-x^3-x^4 \in W$$

$$x \in W, x^2-x^3 \in W \Rightarrow (x^2-x^3)+x^2+x^3 \in W \Rightarrow x^2 \in W$$

$$1 \in W, x^2 \in W, x^3+x^2+x^2 \in W \Rightarrow x^3+x^2+x^2-x^2-x^3 \in W$$

$$\Rightarrow \{1, x, x^2, x^3\} \subseteq W$$

$$\|K[x]\|_{\leq 3} = \mathcal{L}(1, x, x^2, x^3)$$

$$y'' = \{1, 2, x, x+1, x+x^2, x-x^2, x^3+x^2\}.$$

$$L(y) = L(y') = L(y'').$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

$$\begin{aligned} L((100), (010), (001)) &= \{a(100) + b(010) + c(001) \\ &= (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$$\{(x, y, z), (x', y', z')\} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (l, m, n)$$

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') &= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= (l, m, n). \end{aligned}$$

$$L((100), (111)) = \{(\alpha + \beta, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

$$(001) \notin$$

$\mathbb{R}^3$ non è mai generato da ≤ 2 vettori

$\mathbb{R}^3$ può essere generato da ≥ 3 vettori.

$$L((100), (200), (300)) \neq \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^3 = L((100), (010), (001), (111)).$$

Def: Una sequenza di vettori $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \subseteq V(k)$

è detta libera se

$$\left[\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \Rightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n) = (0 \dots 0) \right]$$

Una sequenza è libera se l'unica sua comb.

lineare che dà 0 è quella a coeff. tutti nulli.

Es. $((100), (010))$ LIBERA

$$\alpha(100) + \beta(010) = (\alpha \ \beta \ 0) = (000) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$((100), (200))$ NON LIBERA = LEGATA

$$-2 \cdot (100) + 1 \cdot (200) = (000).$$

I vettori di una sequenza libera sono detti
linearmente indipendenti.

Una sequenza $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è detta LEGATA se
non è libera cioè esiste una c. lineare dei
noi vettori a coeff. non tutti nulli che dà 0.

$$\exists (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n; (a_1 \dots a_n) \neq (0 \dots 0): \text{LEGATA}$$
$$a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n = \underline{0} \quad \perp$$

I vettori di una sequenza legata sono detti
linearmente dipendenti.

off 1) Se una seq.

contiene $\underline{0} \Rightarrow$ è legata

$$\underline{0} = 1 \cdot \underline{0} + 0 \dots$$

2) Se una seq. contiene 2

vettori uguali $\bar{v}_i, \bar{v}_j \Rightarrow$ è legata.

$$\underline{0} = 1\bar{v}_i + (-1)\bar{v}_j$$

3) Se una seq. contiene 2 vettori

proporzionali $\Rightarrow$ è legata.

$$\bar{v}_j = \alpha \bar{v}_i \Rightarrow (-\alpha)\bar{v}_i + \bar{v}_j = \underline{0}$$

4) Se un vettore $\bar{v}_i$ di una seq.

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è c. lineare dei rimanenti:

$\Rightarrow$ la seq. è legata.

$$\bar{v}_i = \alpha \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + (-\bar{v}_i) + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

Se una matrice ha
 $(0 \dots 0)$ come riga
 $\Rightarrow$ il suo $\det = 0$.

Se una matrice ha 2
righe uguali $\Rightarrow$ il suo
 $\det = 0$.

Se una matrice ha
2 righe proporzionali
 $\Rightarrow$ il suo $\det = 0$.

Se una riga è c. lineare
delle rimanenti $\Rightarrow$
 $\det = 0$

Teorema: Una sequenza $S = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ è legata
 e solamente se $\exists \bar{v}_i \in S$ che è
 combinazione lineare dei rimanenti.

$$\overline{v}_i \in S \text{ legata} \Leftrightarrow \exists \bar{v}_j \in S \setminus L(S \setminus \{\bar{v}_i\}).$$

Dim: Supponiamo WLOG (= without loss of generality).

$$\bar{v}_1 \in S \setminus L(S \setminus \{\bar{v}_1\}) \Rightarrow$$

$$\bar{v}_1 = \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n \Rightarrow$$

$$(-1) \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \Rightarrow S \text{ legata}.$$

Viceversa: $S \text{ legata} \Rightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0) :$

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

Supponiamo wlog $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha_2' \in \mathbb{K}$

$$\text{e } \alpha_1 \bar{v}_1 = -\alpha_1 \bar{v}_2 + \dots - \alpha_n \bar{v}_n$$

moltiplico per α_1^{-1}

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = 1 \cdot \bar{v}_1 &= (\alpha_1^{-1} \alpha_1) \bar{v}_1 = \alpha_1^{-1} (-\alpha_1 \bar{v}_2 + \dots - \alpha_n \bar{v}_n) \\ &= (-\alpha_1^{-1} \alpha_1) \bar{v}_2 + \dots (-\alpha_1^{-1} \alpha_n) \bar{v}_n \\ &\in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_1\}) \quad \square \end{aligned}$$

Teorema/metodo degli scarti successivi.

Sia $S = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ una sequenza di generatori per $V(\mathbb{K})$. Se $S = \emptyset \Rightarrow V(\mathbb{K}) = \{0\}$.

Se $S \neq \emptyset$ è logora $\Rightarrow \exists \bar{v}_i \in S$ tale che

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}).$$

Def: $S \neq \emptyset$ ed S leggato $\Leftrightarrow \exists \bar{v}_i \in S$ tale che

$$\bar{v}_i \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \Rightarrow \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = \mathcal{L}(S)$$

in quanto $\mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\} \cup \{\bar{v}_i\})$
 $= \mathcal{L}(S).$ □

T S leggato $\Rightarrow \exists \bar{v}_i \in S$: $\bar{v}_i = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$
↑
non compare $\bar{v}_i$.

$$\begin{aligned} \bar{w} \in \mathcal{L}(S) &\Rightarrow \bar{w} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \\ &= \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i (\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n) + \beta_n \bar{v}_n = \\ &= (\beta_1 + \beta_i \alpha_1) \bar{v}_1 + \dots + (\beta_i + \beta_i \alpha_n) \bar{v}_n \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}). \end{aligned}$$

↑
non compare $\bar{v}_i$.

Teorema (generale): Sia $V(k)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. $V(k) \neq \emptyset$.
Allora $V(k)$ ammette una seq. Libera di
generatori.

Teorema: Sia $V(k)$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ con
 $V(k) \neq \emptyset$ e finitamente generato.
Allora $V(k)$ ammette una seq. Libera di
generatori.

DM: Sia $S = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ una sequenza di n
generatori per $V(k)$.
Se S è libera $\Rightarrow \text{FINE}$
Se $S \neq \emptyset \Rightarrow V(k) = \{0\} \Rightarrow \text{FINE}$.
Supponiamo dunque $S \neq \emptyset$ ed S legata.

$\Rightarrow$ per questo visto prima

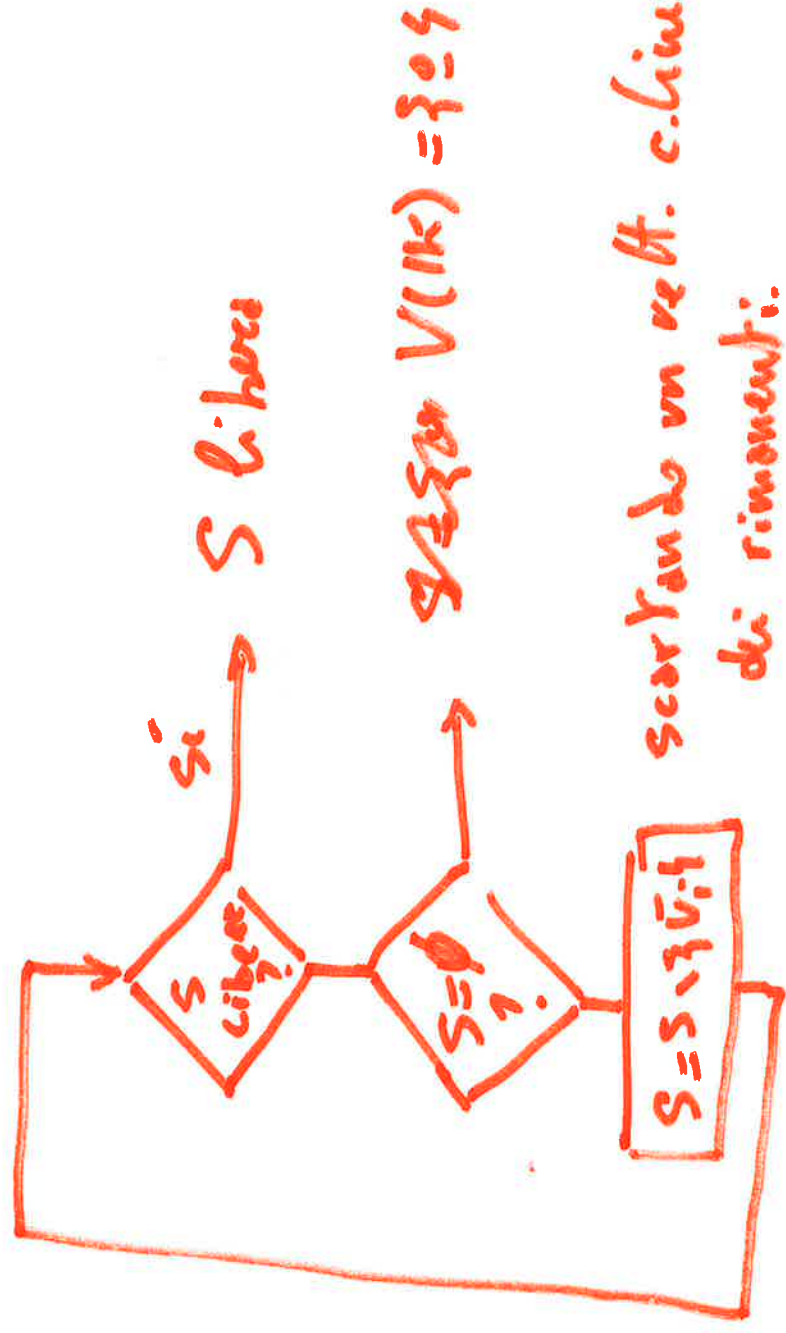
$\exists \bar{v}_i \in S: L(S) = L(S \setminus \{\bar{v}_i\})$.

possiamo $S' = S \setminus \{\bar{v}_i\}$ ed abbiamo

$$|S'| = n-1.$$

Ripetiamo la dim. con S' al posto di S .

□



scorrendo un vett. c.liure
di rimontati.

Le sequenze logite non sono sequenze
minime di generatori. ✓

Le sequenze libere sono sequenze minime di
generatori.

In una seq. libera nessun vettore è comb. lineare
dei rimanenti $\Rightarrow \forall \bar{v}_i \in S \text{ con } S = (v_1 \dots v_n)$

Libera in $\mathcal{H}_A \quad \bar{v}_i \notin \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subsetneq \mathcal{L}(S).$$

□

Def: Si dice base di uno sp. vettoriale $V(K)$ una
sua sequenza libera di generatori.

Lemma: Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale su K (finitamente generato) e $B = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ una sua base (= seq. linear. di generatori).

Allora:

$$\left[\forall \bar{v} \in V(K) \exists ! (a_1, \dots, a_n) \in K^n : \right.$$

$$\bar{v} = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n \left. \right]$$

Dim: poichè B è di generatori $\forall \bar{v} \in V$

$$\exists (a_1, \dots, a_n) \in K^n \text{ tale che } \bar{v} = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n$$

$$\text{supponiamo } \bar{v} = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n =$$

$$= b_1 \bar{v}_1 + \dots + b_n \bar{v}_n$$

$$\text{con } (a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n).$$

$$\Rightarrow \underline{0} = \bar{V} - \bar{V} = (\alpha_1 \bar{V}_1 + \dots + \alpha_n \bar{V}_n) - (\beta_1 \bar{V}_1 + \dots + \beta_n \bar{V}_n)$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1) \bar{V}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{V}_n$$

MA $\underline{0}$ è libera $\Rightarrow \underline{0}$ si scrive in modo unico

$$\Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = 0$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n - \beta_n = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1$$

cioè

$$\vdots$$

$$\alpha_n = \beta_n$$

by

Assurdo perché si era supposto $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (\beta_1 \dots \beta_n)$.

□

Sia $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ una base di $V(K)$.

Sia $\Phi_{\mathcal{B}}: V(K) \rightarrow K^n$

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n \longrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

ALLORA

1) $\Phi_{\mathcal{B}}$ è biettiva.

2) $\Phi_{\mathcal{B}}$ è lineare

$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}$ è un
isomorfismo!

$\Phi_{\mathcal{B}}$ associa ad ogni vettore $\bar{v} \in V(K)$

le sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

Siamo

in

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

$$\bar{w} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n$$

$\in V(K)$ $\alpha, \beta \in K$.

$$\Rightarrow \Phi_{\sigma_3}(a\bar{v} + b\bar{w}) =$$

$$= \Phi_{\sigma_3}(a\alpha_1\bar{v}_1 + \dots + a\alpha_n\bar{v}_n + b\beta_1\bar{v}_1 + \dots + b\beta_n\bar{v}_n)$$

$$= \Phi_{\sigma_3}((a\alpha_1 + b\beta_1)\bar{v}_1 + \dots + (a\alpha_n + b\beta_n)\bar{v}_n) =$$

$$= ((a\alpha_1 + b\beta_1) \dots (a\alpha_n + b\beta_n)) =$$

$$= a(\alpha_1 \dots \alpha_n) + b(\beta_1 \dots \beta_n) =$$

$$= a\Phi_{\sigma_3}(\bar{v}) + b\Phi_{\sigma_3}(\bar{w})$$

□

